

物理現象を記述する偏微分方程式の数学解析



地域ひと・モノ・未来情報研究センター

准教授 杉山 裕介

研究分野 : 偏微分方程式

熱、微生物、半導体中の電子の動き（拡散現象）、気体や弾性体内を伝わる密度波、道路を走り交差する車両の粗密（波動現象）などは、偏微分方程式を使って記述することができる。コンピュータの発展に伴って、数値計算で近似解を計算することは容易になってきたが、近似やモデルの正当化はもちろん、近似の精度が落ちてしまうような無限個の情報や特異点を含むような計算には、数学が必要不可欠となる。微積分、幾何学、確率論などを用いて、このような偏微分方程式の研究を行っている。

■波動現象を記述する双曲型偏微分方程式の研究

気体や弾性体内を伝わる密度波や道路を走り交差する車両の粗密などは、双曲型偏微分方程式（もしくは、波動方程式）と呼ばれる微分方程式で記述することができる。これらの現象を記述する方程式は、一般に、非線形である。つまり、波の重ね合わせの原理が成立しない。このような非線形の方程式においては、初期データが滑らかであっても、有限時間でその滑らかさが失われるような現象（特異性）が発生し得る。特異点付近では、不安定性が生じ、数値計算も適用が難しくなる場合が多い。我々の研究では、様々な双曲型偏微分方程式に対して、特異性が発生する条件やその種類、さらに発生する時刻の評価などを与えた。

共同研究者：Yunguang Lu (中国 浙江科学技術大学), Yanbo Hu (中国 浙江科学技術大学)

参考文献

- [1] Y.-G. Lu, Y. Sugiyama, Existence and nonexistence theorems for global weak solutions to quasilinear wave equations for the elasticity, *Applied Mathematics Letters*, Vol. 84, (2018) 118-123.
- [2] Y. Sugiyama, Local solvability for a quasilinear wave equation with the far files degeneracy: 1D case, *Communications in Mathematical Sciences*, Vol. 21, (2023) 219-237.

■分数冪拡散項を持つ移流拡散方程式の解の漸近挙動

電場の影響を受けながら運動する半導体内の電子や化学物質の影響を受けながら拡散する粘菌の密度分布などは、移流拡散方程式で記述することができる。通常、拡散過程は、ブラウン運動に従うが、我々の研究では、拡散項を（通常ラプラシアンに対応した部分を）分数冪ラプラシアンに置き換えている。これによって、不連続な粒子の拡散過程を記述できるようにしている。半導体内の電子は、ドーパントをジャンプするように動くため、分数冪ラプラシアンに置き換えたモデルの方がより正確に物理現象を記述するとされている。我々の研究では、この方程式の可解性（解の存在や一意性）や解の漸近挙動（解が時間無限大の未来でどのような関数へと近づくか）という問題を研究した。

共同研究者：山本征法（新潟大学）

参考文献

- [1] M. Yamamoto, Y. Sugiyama, Asymptotic stability of stationary solutions to the drift-diffusion model with the fractional dissipation, *Journal of Evolution Equations*, Vol. 21, (2021) 1383 - 1417.
- [2] Y. Sugiyama, M. Yamamoto and K. Kato, Spatial-decay of solutions to the quasi-geostrophic equation with the critical and the supercritical dissipation, *Nonlinearity*, Vol. 32, (2019) 2467 - 2480.